７６　数学分野　「多面体におけるオイラーの公式」

(1) 研究開発の概要

名古屋大学多元数理科学研究科の楯辰哉助教授をお招きし、「多面体に対するオイラーの公式」という演題で講義を受けた。講義後には、記名式アンケートを実施し、生徒の興味・関心や理解度を調査した。

(2) 研究開発の経緯

ア　打ち合わせ

５月名古屋大学に講師派遣依頼をし、多元数理科学研究科から早速快諾をいただいた。担当講師が楯辰哉助教授と決まり、７月２４日（月）に打ち合わせのため名古屋大学を訪ね、講義の内容について相談をした。ＳＳＨの実施状況や数学の授業の進度などをお伝えし、幾何学分野のお話をしていただくこととし、演題や詳しい内容については電子メールなどで詰めていくこととした。

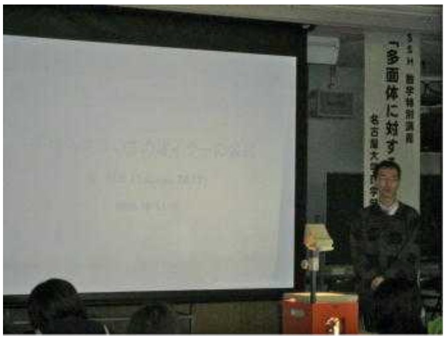
８月に入り電子メール交換により、『多面体に対するオイラーの公式』という演題に決定した。

イ　事前指導

楯助教授より特別に事前授業は必要ないとのことであったので、事前授業は実施せず、講義の実施要項の中で講師からの 『凸多面体に対するオイラー標数とは、（頂点の数：ｖ）－（辺の数：ｅ）＋（面の数：ｆ）で定義される数です。オイラーの公式とは、どのような凸多面体に対しても、オイラー標数が２になる、というものです。トポロジーという分野に配属される話題ですが、これを組み合わせ論的に取り扱います。具体例での検証や歴史的な解説、そして証明（のアウトライン）を説明する予定です。』というコメントおよびオイラーの簡単な人物紹介にとどめた。

ウ　実施方法

２年理系５クラスのうち、３クラスと２クラスに分け、それぞれ午後の２時間を講義の時間としてあてる。



講義風景

エ　事後指導

事後、講義に関するアンケートを実施することにより、生徒の興味・関心度や理解度を調査した。

(3) 仮説（ねらい、目標）

小説「博士の愛した数式」で話題になったオイラーの公式だけでなく、オイラーの事績を知ることによって数学という学問の世界の幅広さを実感させる。

(4) 研究の方法及び内容

ア　対象生徒　　２年理系５クラスの生徒

イ　実施日程　　11 月 20 日（月）、21 日（火）　の２日間

ウ　実施内容

(ｱ)　導入

凸多面体の定義から入り、正多面体の実物模型を提示しながら、頂点の数、辺の数、面の数を生徒に実際に数えさせながら、共通する性質の確認をさせた。

(ｲ)　展開

①　正多面体が５種類しかないことの証明

オイラーの公式が成り立つことを前提に、１つの頂点に集まる辺と面の個数の関係をもとに５通りの整数解しか存在しないことを示した。　［注１］

②　オイラーの公式の証明（概略）

《手順１》凸多面体の１つの面を取り外しておき、辺と面の関係をそのまま平面に引き延ばす操作を考える。(『平面に投影する』)

＝＞面は１つ減るが、辺の本数、頂点の個数は不変。

《手順２》全ての面を三角形に区分けする。

＝＞面と辺の増える個数は一致。頂点の個数は不変。

《手順３》外側から１つずつ三角形を減らす。
＝＞パターン①　辺１を除くとき、面１だけ減る。
パターン②　辺２を除くとき、面１と頂点１が減る。

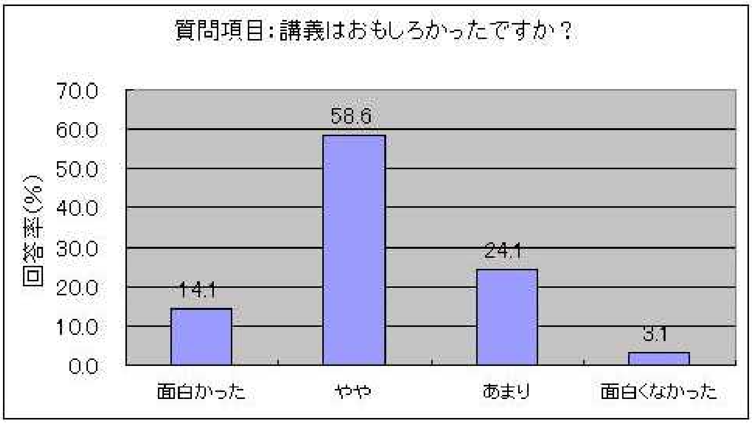
凸多面体に対して《手順１、２》を行い《手順３》を繰り返すと１つの三角形を残すのみとなる。三角形においては、ｖ－ｅ＋ｆ　＝３－３＋１＝１が成り立つから手順を逆に辿ればｖ－ｅ＋ｆ＝２が成り立つ。

③　その他の多面体についても言及
凹多面体でも膨らませれば球になる物は同様の式が成り立つ。
膨らませたときに球でなく､穴があいた物については穴の個数によって決まる。

④　数学者オイラーの紹介
バーゼル問題［注２］を解決したこと。
全盲になっても論文を書き続けたこと。

(ｳ)　事後指導
記名式アンケートを実施し､講義への興味関心の強さ､理解の深さの調査をした。また１月の理系実力考査の中で、実施内容①の５つの整数解を求める問題を出題するなど定着率についても把握しようとした。

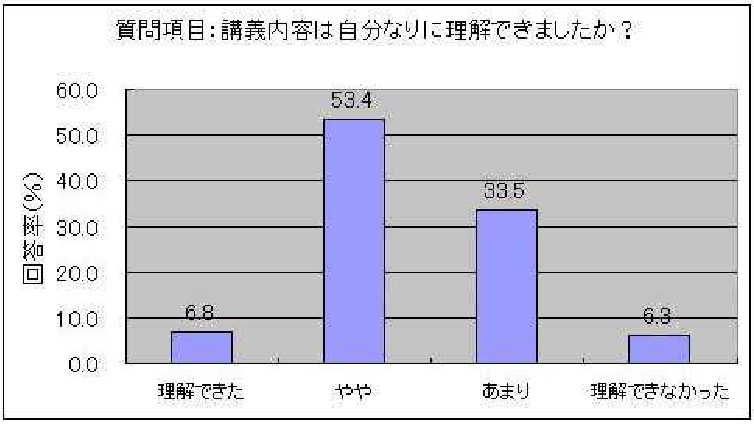
(5)　検証（成果と反省）
ア　事業実施による成果



数学の講義が２度目ということもあり、スムーズに展開できた。アンケートの結果では、７割以上の生徒が「おもしろかった」「どちらかといえばおもしろかった」と答えており、興味を持って取り組めている。また、「よく理解できた」「どちらかといえば理解できた」と答えた生徒が６割を超えるなど理解度も高く、身近な立体図形が題材ということもあり意欲的に講義を聴くことができた。

バーゼル問題についても無限級数について学習したばかりであったので、興味深く聞くことができた。講演後の質問でも講義内容の本質を深くつくものもあり、講師の先生に感心されるなど有意義に時間を過ごすことができた。

イ　今後の課題
今回ＯＨＰを使用しての講演となったが､光源が暗かったため講義室（視聴覚室）の後ろの生徒からスクリーンが見にくいとの感想が多くあった。事前点検で光量まで気が回らなかったので反省点としたい。また、３クラスの生徒が入って講義を聴くのにはやや手狭ではある。受講方法の工夫が必要である。



１月の実力考査において確認問題を出題したが、講義から時間が経過していたせいか、期待したほどの出来ではなかった。事後指導で一回押さえておくと定着できたと考えられる。

資料

［注１］

正多面体の、頂点の個数をv、辺の本数をe、面の個数をfとする。
$v-e+f=2$…①が成り立っている。
一つの頂点に集まる線分の本数をp、面の個数をqとおくと、
$vq=2e$…②　$fp=2e$…③が成り立つ。
v, e, f, p, q は３以上の整数である。
②③より、$v=\frac{2e}{q}$，$f=\frac{2e}{p}$　が成り立つ。
これらを①へ代入すると、
$\frac{2e}{q}-e+\frac{2e}{p}=2$　　分母を払って整理すると、
$e(2p+2q-pq)=2pq$
ここで、$e>0$　，$pq>0$ だから、$2p+2q-pq>0$である。
よって、$pq-2p-2q<0$　すなわち、　$(p-2)(q-2)<4$　…④　が成り立つ。
$p-2, q-2$ は正の整数だから、④を満たす組は、
$(p-2, q-2)=(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (3,1)$
よって、　$(p, q)=(3,3), (3,4), (3,5), (4,3), (5,3)$
これらは順に、正四面体、正六面体(立方体)、正十二面体、正八面体、
正二十面体を表している。

［注２］

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$