# ４１　数学分野「微分的な自然現象」

(1)　研究開発の概要

３年次一学期までに学習した通常の教育課程の内容を踏まえ、授業「微分的な自然現象」を実施した。後日、評価テストを行い解説を加えた。

(2)　研究開発の経緯

ア　打ち合わせ

外部講師による特別講義として、一年次「無限を数える」二年次「検索のはなし」での経験を踏まえ、今年度は本校職員により教材を作成し、平常時と同様の授業として実施するものとした。分野はできる限り多くの自然現象を数学的に表現することを視野に入れて、微分方程式とした。

イ　準備

(ｱ)　授業の基礎知識として、以下の内容が必要とされた。

ａ　無理関数・指数関数、ｂ　関数の極限、ｃ　不定積分

(ｲ)　教材作成に関して、以下の書籍を参考とした。

「微分方程式」　矢野健太郎監修　科学新興新社
「常微分方程式」　ポントリャーギン著　共立出版
「力学系入門」　斉藤利弥著　朝倉書店
「量子力学」　江沢洋著　裳華房

ウ　実施

平常時の授業同様に、各学級ごとに２時限にわたり授業を実施した。

エ　事後指導

各学級で演習を１時限実施し、知識の定着を図った。その後、評価テストとその解説を実施した。

(3)　仮説（ねらい、目標）

第３学年理系生徒全体を対象とした企画である。今まで学習した基礎知識を土台とし、通常授業での実施可能性において第１、２学年次よりさらに踏み込んだものを目指す。微分方程式を使い、多くの科学的問題を扱う。自然現象を表現する手段としての数学に対する生徒の興味・関心をより高める。

(4)　研究の方法および内容

ア　対象生徒　第３学年理系６学級の全生徒
イ　実施日程　各学級とも９月中の２日間
ウ　実施内容

(ｱ)　微分方程式の解とは

一般解・特殊解と解曲線の理解・運用を学ぶ。

(ｲ)　落下風船の終端速度

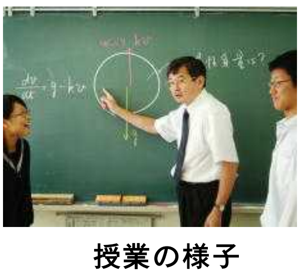
大気中をゆっくり移動する物体への抵抗は、速さ $v$ に比例する。この抵抗と一様な重力のみをうける物体の運動方程式 $\frac{dv}{dt}=g-kv$ を立て、速さ $v$ の変化を調べた。また、この結果から風船内の気体の慣性質量を求められないか、検討を加えた。

(ｳ)　熱伝導現象

大気中にある熱せられた物体の温度変化率は、大気と物体の温度差 $T-T_0$ に比例する。この物体の温度 $T$ の満たす微分方程式 $\frac{dT}{dt}=-k(T-T_0)$ を立て、温度 $T$ の変化を調べた。

(ｴ)　流体現象

底に穴の開いた容器の中にある水の流失速度は、コリオリ力を無視すれば水深 $h$ の平方根に比例する。様々な形の容器に対し、この水深 $h$ の満たす微分法方程式をたて、水の流失の様子を調べた。



授業の様子

(ｵ)　クーロン・ポテンシャルの場を運動する電子のエネルギー準位

クーロン・ポテンシャル中の電子のシュレディンガー方程式を用い、量子力学も微分方程式で表現されることを紹介し、水素原子のエネルギー準位を呈示した。

(5)　検証（成果と反省）

ア　事業実施による成果

　数学の特別講義を二年間経験していることもあり、難解な分野にも緊張が解けた前向きな状態で受講できた。簡単な演習を随所に混ぜたこともあり、前半の部分はほとんどの生徒がついて来ることができた。後半の量子計算の分野については難解であったが、３年間言葉として聴かされた「量子力学」の紹介として強い関心を示した。

評価考査の様子

イ　事業内容全体の評価

　研究授業の後に、演習と評価考査を実施した。ほとんど全員の生徒が速い速度で自由落下する物体の問題については正解していた。変数分離、部分分数などを用いた解法をかなりの生徒が理解していた。スーパーサイエンス事業（数学）としては、評価できるものであった。

評価考査

$\boxed{1}$ 空気中で物体が（速い速度で）落下するとき、速度の大きさの２乗に比例した空気の抵抗をうけ、時刻 $t$ における速度 $v$ は、次の微分方程式を満たす。

$$\frac{dv}{dt} = g - kv^2$$

ただし、$g, k$ は正の定数である。

(1) 初期条件 $t=0$ のとき $v=0$ を満たす、時刻 $t$ における速度 $v$ を求めよ。

(2) $\lim_{t\to\infty} v$ の値を求めよ。

$\boxed{2}$ ある生物の体長 $L$ を測定したら、時刻 $t$ に対する変化状況は、次の微分方程式で表された。

$$\frac{dL}{dt} = k(L_m - L)$$

ただし、$k, L_m$ は定数である。

(1) 初期条件 $t=0$ のとき $L=L_0$（$L_m > L_0 > 0$）を満たす特殊解を求めよ。

更に測定を続けたら、微分方程式は次のように修正された。

$$\frac{dL}{dt} = k(L_m - L) + lt$$

ただし、$l$ は定数である。

(2) 初期条件 $t=0$ のとき $L=L_0$（$L_m > L_0 > 0$）を満たす特殊解を求めよ。

ウ　課題

　数学という教科の特性上、現象論が殆ど無く論理の積み上げが必要で断片的な学習が難解である。しかし、高校数学の後にはすばらしく美しい世界が広がっており、これから専門的に学ぼうとしている高校生にとっては、興味・関心を持つことが重要である。今回の授業を発展、定着することが今後の課題となる。