2.3　数学分野

(1) 研究開発の概要

高校数学の範囲を超えた分野について話題を提供し、より深く研究させる。

(2) 研究開発の経緯

ア　準備………５月ごろ高校２年生が取り組めそうな内容を厳選した。その後７月にかけて、導入として利用するプリントを作成。

７月の研究を発展させ、１２月にはさらに進んだ研究に取り組ませる。

イ　実施………夏休み中を利用して３日間、２つの題材について取り組む。

冬休み中には４日間、４つの題材について取り組む予定である。

ウ　事後指導…興味を持った分野についてさらに発展して研究するように指示。

３年次の研究へとつなげることができるようにする。

(3) 仮説（ねらい、目標）

理系全体を対象とするＳＳＨ事業からさらに発展して、数学に高い関心を持つ生徒を対象に、より高度な話題を提供することによって深い研究をさせることが目的である。

講義・演習にとどまらず、さらに一歩進んで自ら考えさせることを目標とする。

(4) 研究の方法および内容

ア　対象生徒　数学に関心のある生徒１０数名

イ　実施日程　７月２１日（水）、２２日（木）、２６日（月）の３日間

１２月２４日（金）、２５日（土）、２６日（日）、２７日（月）の４日間

ウ　実施内容

(ｱ)　７月２１日……複素数平面について

a　複素数平面の導入、複素数計算と複素数平面での対応

b　複素数の極形式表示

c　複素数の積・商の図形的考察

d　ド・モアブルの定理について

e　円分方程式の解法

f　オイラーの公式について

(ｲ)　７月２２日、２６日……自然数と実数の濃度について（教材例……下記参照）

a　濃度について

b　加算濃度について

c　有理数と自然数の濃度が等しいこと

d　対角線論法

e　実数の濃度について

(ｳ)　１２月以降について……１次元の量子力学や図形の１次変換、難しめの微分方程式などを研究対象とすることができるよう検討中である。

(5) 検証（成果と反省）

ア　事業実施による成果……純粋数学は生徒に敬遠されがちであるにもかかわらず、予想以上の生徒が積極的に参加した。高校の教育課程をはるかに超える内容について議論することができた。

イ　事業内容全体の評価……数学は高校と大学の間のギャップがかなり大きいが、今回の特別研究でその溝をいくらか埋めることが出来たことは評価に値すると思われる。提示された発展的問題だけにとどまらず、生徒側からの質問も多く出た。また、自由に発想させることにより数学的思考力を高めることができた。

ウ　課題

(ｱ)　今後の発展について………今後もさらにこれを発展させた事業を実施できるよう計画中である。

(ｲ)　大学との連携について……本校の教員が問題提起し、考えさせるという事業なので、大学からのアドバイスを受けることが望ましい。

(ｳ)　教材開発について…………前述したように、高校と大学との内容のギャップが極めて大きいので、紹介できる内容が限られている。

※　教材例

ＳＳＨ数学　夏期特別講座　濃度

問　0 + 0 = 0 だが、0 は本当にどれだけ集めても 0 ？

問　自然数の列（1,2,3,4,5 …）の個数と平方数の列（1,4,9,16,25 …）の個数は一致するか

1　濃度について

無限集合の要素の個数のことを「濃度」という。有限集合での個数の概念の拡張。

無限集合の中で、自然数の集合と対等（1対1対応）な集合を「加算集合」という。

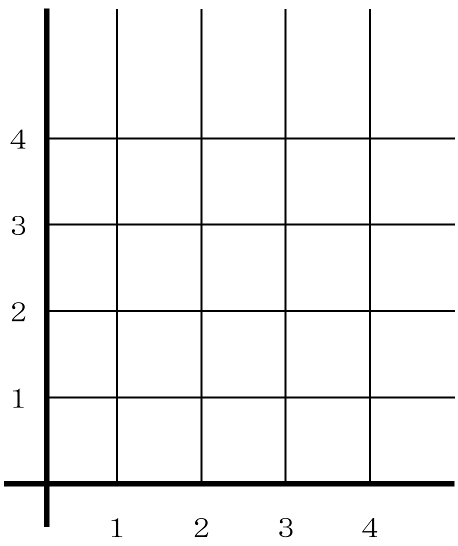
要素の個数のことを、「加算の濃度」といい、 $\aleph_0$ （アレフゼロ）とかく。

問①　自然数の集合と偶数の集合は濃度が等しいことを示せ。

注意： $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ 　となったが、 $\aleph_0 = 0$ 　とはならない。

問②　有理数の集合と自然数の集合の濃度が等しいことを示せ。

（1対1の対応がつけばよいということである）



注意： $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$ 　となったが、 $\aleph_0 = 1$ 　とはならない。

② 対角線論法

自然数の集合と実数の集合の濃度が等しくない（１対１の対応がつかない）ことは以下の証明からわかる。

仮に０以上１以下の実数と自然数とを１対１対応させることができたと仮定する。実数を順に a_1、a_2、a_3、a_4、………… とする。

a_1の小数点第１位の数をa_{11}、小数点第２位の数をa_{12}、 小数点第３位の数をa_{13}、……とする。

つまり $a_1 = 0.\ a_{11}a_{12}a_{13}\ a_{14}\cdots\cdots$

$a_2 = 0.\ a_{21}a_{22}a_{23}\ a_{24}\cdots\cdots$

$a_3 = 0.\ a_{31}a_{32}a_{33}\ a_{34}\cdots\cdots$

・　　　・

・　　　・

（自然数mに対応する実数の小数点第k位の数字はa_{mk}ということ）

ここで次の実数b を考える。

bの小数第１位には a_{11} と異なる数を取り b_1 とする。

同様に、a_{22} と異なる数を b_2、a_{33} と異なる数を b_3、……とする。

$b = 0.\ b_1 b_2 b_3\cdots\cdots$ は a_1、a_2、a_3、…… のどれとも一致しない。

これは１対１対応が成立しているという仮定に矛盾。

背理法により証明が出来た。

③ 連続の濃度

実数の濃度を、記号 $\aleph$ （アレフとよむ）であらわす。

$$2^{\aleph_0} = \aleph$$

（２のアレフゼロ乗はアレフ）

実数と自然数の違い

自然数は間に数を取ることの出来ない隣の数が存在するが、実数には隣の数が存在しない。このために、無限に多くの自然数を持ってきても、実数との間に１対１の対応はつかない。

問：区間（０，１）の濃度と実数全体の濃度は等しいことを証明せよ。

問：無理数の濃度は？

④ おまけ

有理数 $\dfrac{n}{m}$ において小数が無限に続く時、その小数は循環することを証明せよ。

（m、nは自然数とする）