

9 3 - 1 数学分野 「微分的な自然現象」

(1) 研究開発の概要

3年次一学期までに学習した教育課程の内容を基礎として、授業「微分的な自然現象」を実施した。さらに実施後、評価テストを行い解説を加えた。

(2) 研究開発の経緯

ア 打ち合わせ

外部講師による特別講義として、2年次までに種々の経験をしている。今年度も本校職員により教材を昨年度より質の高いものとして作成し、平常時と同様の授業として実施するものとした。分野としては身近な自然現象であれば、生徒にとって垣根の高い「数学」という分野に対して興味関心を引き出せるため、そして大学に進んですぐに必要となってくる、微分方程式の分野を採用した。

イ 準備

(ア) 授業の基礎知識として、以下の内容が必要とされた。

- a 三角関数・指数関数・対数関数
- b 関数の極限
- c 不定積分

(イ) スーパーサイエンス事業において、独自の教材を年々の蓄積により完成した。

その作成に関して、以下の書籍を参考とした。

- 「微分方程式」 矢野健太郎監修 科学新興新社
- 「力学系入門」 斉藤利弥著 朝倉書店
- 「量子力学」 江沢洋著 裳華房

ウ 実施

平常時の授業同様に、各学級ごとに3時限にわたり授業を実施した。講義だけで終わることなく、身近な題材をもとにする演習によって、より深い理解と関心が湧くようにした。

エ 事後指導

各学級で3時間の講義の後、評価テストを実施し、後日その解説を実施した。

(3) 仮説（ねらい、目標）

第3学年理系生徒全体を対象としたSSH事業である。今まで学習した基礎知識を土台とし、第1、2学年次よりさらに踏み込んだものを目指す。微分方程式を使い、多くの科学的問題を数学的に扱う。自然現象を表現する手段としての「数学」に対する生徒の興味・関心をより高める。物理で学習した分野とリンクさせることにより、魅力のある分野として生徒に訴えかける。

(4) 研究の方法および内容

ア 対象生徒 第3学年理系5学級の全生徒

イ 実施日程 各学級とも9月中の3日間

ウ 実施内容

- a 微分方程式の解とは
一般解・特殊解と解曲線を学ぶ。
- b 簡単な微分方程式の解法

変数分離形を主とした微分方程式の作成・解法を学び、解を求められるよう演習させる。さらに初期条件の意味を理解させる。

c 落下物体の速度

大気中を落下する物体への空気抵抗は、速さ v に比例する。この抵抗と一様な重力のみをうける物体の運動方程式 $\frac{dv}{dt} = g - kv$ をたて、速さ v の変化を調べた。

d 熱伝導現象

大気中にある熱せられた物体の冷却する速さは、大気と物体の温度差 $T - T_0$ に比例する。この物体の温度 T の満たす微分方程式 $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0)$ をたて、温度 T の変化を調べ、その極限值を調べる。

e 流体现象

底に穴の開いた容器の中にある水の流失速度は、コリオリ力を無視すれば水深 h の平方根に比例する。様々な形の容器に対し、この水深 h の満たす微分方程式をたて、水の流失の様子を調べ、全部流出するまでの時間を求めた。

$$\frac{dV}{dt} = a\sqrt{2gh}$$

f 同次形・おきかえ・1階線形微分方程式といったより高度な微分方程式の解法を紹介し演習する。

(5) 検証(成果と反省)

ア 事業実施による成果

数学の特別講義を二年間経験していることもあり、難解な分野にも緊張が解けた前向きな状態で受講できた。簡単な演習を随所に混ぜたこともあり、前半の部分はほとんどの生徒がついて来ることができた。難解な問題についてもかなりの生徒が強い関心を示し、後日質問に来る生徒もいた。さらに進んで微分方程式を追求しようとする生徒もみられた。

イ 事業内容全体の評価

授業の後に、演習と評価考査を実施して、かなりの生徒が正解していた。スーパーサイエンス事業(数学)としては、評価できるものであったと考えられる。

演習の例

① 空気中で物体が(速い速度で)落下するとき、速度の大きさの2乗に比例した空気の抵抗をうけ、時刻 t における速度 v は、次の微分方程式を満たす。

$$\frac{dv}{dt} = g - kv^2 \quad \text{ただし、} g, k \text{ は正の定数である。}$$

- (1) 初期条件 $t = 0$ のとき $v = 0$ を満たすとき、時刻 t における速度 v を求めよ。
- (2) $\lim_t v$ の値を求めよ。

② 大気中に置かれた物体が冷却する速さは、その物体の温度と周囲の温度の差に比例する。すなわち、時刻 t における物体の温度を T 、一定な周囲の温度を T_0 とすると、 k を正の定数として次の微分方程式が成り立つ。

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0)$$

$t = 0$ のとき $\theta = 1$ として、 θ と t の関係式を求めよ。また $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta$ を求めよ。

[3] 円筒形の水槽の底の一端に小さな穴があり、水が流出している。水の深さが h cm になった時、穴から出る水の速さは $\sqrt{2gh}$ cm/s であるとする。水が流出し始めてから全部流出し終わるまでの時間を求めよ。

ただし、水槽の水平断面積は S (適)、穴の面積は a (適)、始めの水槽の深さは h_0 cm とする。

[4] 強さ I の光が、厚さ x の薄い物質の層を通過する時、光は吸収されて弱まり、強さが $I - kI$ になったとする。この時強さの減少量 $I - I'$ は I と x に比例する。

ある物質で 2 cm の厚さの層を通過した光の強さが半分になったとすれば、10 cm の厚さの層を通過した光の強さはどうなるか。

[5] 微分方程式を $y' + 2y \tan x = \sin x$ 初期条件 $x=0$ のとき $y=3$ で解け。



評価考査の様子

ウ 課題

数学という教科の特性上、現象論がほとんど無く論理の積み上げが必要で、断片的な学習が難解である。しかし、高校数学の後には素晴らしく美しく、限りない世界が広がっており、将来専門的に学び研究しようとしている高校生にとっては、興味・関心を持つことがとても重要である。今回の授業がその糧となることができれば幸いである。